

José Aurilan de Oliveira Feitosa
Neymar José Nepomuceno Cavalcante
Giovane de Souza Silva

Mercúrio e Einstein:

um guia para entender a Precessão do Periélio



EdUESPI

José Aurilan de Oliveira Feitosa
Neymar José Nepomuceno Cavalcante
Giovane de Souza Silva

Mercúrio e Einstein:

um guia para entender a Precessão do Periélio



EdUESPI
2025



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ – UESPI

Evandro Alberto de Sousa
Reitor

Jesus Antônio de Carvalho Abreu
Vice-Reitor

Mônica Maria Feitosa Braga Gentil
Pró-Reitora de Ensino de Graduação

Josiane Silva Araújo
Pró-Reitora Adj. de Ensino de Graduação

Raurys Alencar de Oliveira
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação

Fábia de Kássia Mendes Viana Buenos Aires
Pró-Reitora de Administração

Rosineide Candeia de Araújo
Pró-Reitora Adj. de Administração

Lucídio Beserra Primo
Pró-Reitor de Planejamento e Finanças

Joseane de Carvalho Leão
Pró-Reitora Adj. de Planejamento e Finanças

Ivoneide Pereira de Alencar
Pró-Reitora de Extensão, Assuntos Estudantis e Comunitários

Marcelo de Sousa Neto
Editor da Universidade Estadual do Piauí



**GOVERNO DO ESTADO DO PIAUÍ
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PIAUÍ - UESPI**



Rafael Tajra Fonteles **Governador do Estado**
Themístocles de Sampaio Pereira Filho **Vice-Governador do Estado**
Evandro Alberto de Sousa **Reitor**
Jesus Antônio de Carvalho Abreu **Vice-Reitor**

Conselho Editorial EdUESPI

Marcelo de Sousa Neto **Presidente**
Algemira de Macedo Mendes **Universidade Estadual do Piauí**
Ana de Lourdes Sá de Lira **Universidade Estadual do Piauí**
Antonia Valtéria Melo Alvarenga **Academia de Ciências do Piauí**
Cláudia Cristina da Silva Fontineles **Universidade Federal do Piauí**
Fábio José Vieira **Universidade Estadual do Piauí**
Sammy Sidney Rocha Matias **Universidade Estadual do Piauí**
Gladstone de Alencar Alves **Universidade Estadual do Piauí**
Maria do Socorro Rios Magalhães **Academia Piauiense de Letras**
Nelson Nery Costa **Conselho Estadual de Cultura do Piauí**
Orlando Maurício de Carvalho Berti **Universidade Estadual do Piauí**
Paula Guerra Tavares **Universidade do Porto - Portugal**
Pedro Pio Fontineles Filho **Universidade Estadual do Piauí**

Marcelo de Sousa Neto **Editor**

Autores **Revisão e Diagramação**

Autores **Capa**

Editora e Gráfica UESPI **E-book**

Endereço eletrônico da publicação: <https://editora.uespi.br/index.php/editora/catalog/book/286>

F311m Feitosa, José Aurilan de Oliveira.

Mercúrio e Einstein: um guia para entender a Precessão do Periélio /
José Aurilan de Oliveira Feitosa, Neymar José Nepomuceno Cavalcante,
Giovane de Souza Silva. - Teresina, PI: EdUESPI, 2025.
60 p.: il.

ISBN: 978-65-81376-91-8

1. Órbita de Mercúrio. 2. Mecânica clássica. 3. Relatividade
geral. 4. Precessão do Periélio. 5. Métrica de Schwarzschild. I.
Cavalcante, Neymar José Nepomuceno. II. Silva, Giovane de Souza.
III. Título.

CDD 530

Ficha elaborada pelo Serviço de Catalogação da Biblioteca da UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecário) CRB-3ª/1188

Editora da Universidade Estadual do Piauí - EdUESPI

Rua João Cabral • n. 2231 • Bairro Pirajá • Teresina-PI
Todos os Direitos Reservados

Sobre os Autores

Informações dos Autores

**José Aurilan de
Oliveira Feitosa**



Graduando em Física pela Universidade Estadual do Piauí. Possui interesse em relatividade geral, cosmologia e física teórica. Desenvolve pesquisas na área de astrofísica relativística, com foco em soluções exatas das equações de campo de Einstein.

E-mail: jaurilandeoliveirafeitosa@aluno.uespi.br

ORCID: 0009-0008-3802-6819

Legenda: Foto do autor

**Neymar José
Nepomuceno
Cavalcante**



Legenda: Foto do autor

Professor adjunto III/DE na UESPI. Graduação Licenciatura em Física (UEPB); Mestre em Física (UFCG); Doutor em Física pela Universidade de Brasília (UnB) com doutorado sanduiche realizado na Universidade da Pennsylvania (UPenn). Experiência nas área de Ensino de Física, Física Teórica (Gravitação e Cosmologia) e Física Computacional (Simulação e Modelagem de Estruturas Atômicas e Moleculares). Docente do quadro permanente do programa MNPEF - Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, Polo 66, Piripiri/PI.

E-mail: neymarjose@prp.uespi.br

ORCID: 0009-0003-1216-1629

Giovane de Souza Silva



Legenda: Foto do autor

Graduado em Física pela Universidade Federal do Piauí. Possui interesse em física de partícula e campos, relatividade geral, cosmologia e física teórica. Desenvolve pesquisas na área física de partícula, astrofísica relativística, com foco em Mecanismo geração de massa para neutrino e soluções exatas das equações de campo de Einstein.

E-mail: giovanesilva@prp.uespi.br

ORCID: 0009-0004-7158-4477

Prefácio

ESTE livro nasceu da fascinação compartilhada pelos autores com um dos problemas mais intrigantes da física moderna: a precessão do periélio de Mercúrio. Mais do que uma mera anomalia orbital, este fenômeno representa uma janela privilegiada para compreendermos a evolução do pensamento científico e a transição entre duas grandes teorias físicas: a mecânica newtoniana e a relatividade geral.

A escolha deste tema não é casual. A órbita de Mercúrio constitui um laboratório natural onde podemos testar os limites da física clássica e apreciar a elegância da descrição relativística. Cada fração de arco segundo na precessão do periélio carrega consigo uma história de questionamentos, hipóteses e, finalmente, de compreensão profunda sobre a natureza do espaço, tempo e gravidade.

Nossa abordagem busca equilibrar o rigor matemático com a clareza expositiva, tornando acessíveis conceitos que, à primeira vista, podem parecer áridos. Partimos das bases da mecânica clássica, revisitando as ferramentas analíticas que permitiram a Newton e seus sucessores descreverem com precisão impressionante o movimento dos corpos celestes. Em seguida, mostramos que mesmo essa teoria robusta encontrou seus limites quando confrontada com observações cada vez mais precisas.

O coração deste trabalho reside na exploração da solução de Schwarzschild para as equações de campo de Einstein e como esta solução fornece a correção necessária para explicar completamente a precessão observada. Através de desenvolvimento gradual e com atenção aos detalhes físicos, esperamos conduzir o leitor por esta jornada intelectual que culminou em uma das maiores conquistas da física teórica.

Este livro é destinado a estudantes de física, astronomia e áreas afins, bem como a qualquer leitor com formação científica básica e curiosidade sobre os fundamentos da relatividade geral. Assumimos familiaridade com cálculo diferencial e integral e mecânica clássica, mas fornecemos revisões dos conceitos necessários ao longo do texto.

Agradecemos aos nossos orientadores, colegas e instituição pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho. Esperamos que esta obra contribua para disseminar o apreço pela física teórica e inspire novos estudantes a explorarem as fronteiras do conhecimento.

Os Autores

Sumário

Sobre os Autores	3
Prefácio	5
Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
1 Introdução	1
2 Mecânica Clássica	3
2.1 Fundamentos da Mecânica Clássica	3
2.1.1 As Leis de Newton	3
2.1.2 A Lei da Gravitação Universal	4
2.1.3 Conservação da Energia e do Momento Angular	6
2.1.4 Equações do Movimento em Potenciais Centrais	8
3 O Problema de Kepler	10
3.1 O Problema de Kepler	10
3.1.1 A Primeira Lei de Kepler: Órbitas Elípticas	10
3.1.2 A Segunda Lei de Kepler: Áreas Iguais em Tempos Iguais	14
3.1.3 A Terceira Lei de Kepler: Relação entre Período e Raio Médio	15
4 Movimento Planetário	17
4.1 Perturbações no Movimento Planetário	17
4.1.1 O Vetor de Laplace-Runge-Lenz	17
4.1.2 Contribuições Newtonianas para a Precessão do Periélio de Mercúrio	19
5 Teoria da Relatividade Geral	27
5.1 Fundamentos da Relatividade Geral e Aplicações ao Movimento Planetário	27
5.1.1 Postulados da Relatividade Geral	27
5.1.2 Curvatura do Espaço-Tempo e Órbitas Planetárias	28

SUMÁRIO

5.1.3	Equações de Einstein para Campos Estáticos Esfericamente Simétricos	29
5.1.4	A Solução de Schwarzschild e suas Implicações	29
5.2	A Correção Relativística da Órbita de Mercúrio	36
5.2.1	Cálculo do Avanço do Periélio a Partir da Métrica de Schwarzschild	37
5.2.2	Comparação com Dados Observacionais	43
5.2.3	Relevância Histórica da Precessão do Periélio na Confirmação da Relatividade Geral	43
6	Conclusão	45
A	Lei de Transformação de Coordenadas no Espaço Bidimensional	46
B	Lei de Transformação Vetorial	48
C	Análise Tensorial	49
C.0.1	Componente Covariante de um Tensor	49
C.0.2	Componente Contravariante de um Tensor	50
D	Métrica de Schwarzschild	52
D.0.1	Mudanças de Coordenadas	52
D.0.2	Conexões da Métrica	53
D.0.3	Tensor de Riemann	53
E	Seções Cônicas	55
	Referências	58

Lista de Figuras

2.1	Representação da força gravitacional entre dois corpos de massas distintas .	5
3.1	Representação vetorial no espaço tridimensional com destaque para o momento angular específico \vec{h}	11
3.2	Representação de uma órbita elíptica em torno de um foco, conforme previsto pela primeira lei de Kepler. O corpo em movimento percorre a elipse sob influência de uma força central atrativa, com o foco ocupando a posição da fonte dessa força. .	14
4.1	Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no plano da órbita. Esse vetor aponta na direção do periélio e permanece constante em sistemas keplerianos ideais (sem perturbações), refletindo a simetria do potencial $1/r$ e a conservação da excentricidade.	19
4.2	Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r	23
5.1	Representação da precessão do periélio de Mercúrio	37
5.2	Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r	38
5.3	Contribuição da solução x_1 para a perturbação na órbita de Mercúrio . . .	41
A.1	Representação de um plano rotacionado em torno de um eixo fixo	46
E.1	Representação esquemática da projeção radial e distância à diretriz de uma órbita	55

Lista de Tabelas

5.1	Comparação entre observações e previsões da TRG para o avanço do periélio de Mercúrio.	43
-----	--	----

LISTA DE TABELAS

Capítulo 1

Introdução

Desde o surgimento das primeiras civilizações, o ser humano busca entender a natureza, inicialmente através de mitos e crenças em divindades, posteriormente por intermédio de explicações baseadas na razão e observação. Ao observar o céu noturno, as diferentes culturas construíram denominações aos corpos celestes conforme arcabouço científico de sua época, tais manifestações foram transmitidas ao longo do tempo para as gerações futuras [1].

O questionamento constante sobre os fenômenos da natureza levaram ao surgimento da ciência, em especial a física. Na dinâmica de movimentos, as leis de Newton, com base nas leis de Kepler, descrevem com grande precisão eventos que ocorrem em baixas velocidades. A lei da Gravitação retrata com exatidão as órbitas dos astros celestes ao considerar a gravidade como uma força que depende das massas envolvidas. Contudo, o planeta Mercúrio fogia das explicações dadas pela dinâmica newtoniana, onde esta não explicava a discrepância entre os valores observacionais e teóricos [2, 3].

Em 1915, Albert Einstein publicou a famosa Teoria da Relatividade Geral (TRG), na qual apresentou a gravidade como um efeito da deformação da geometria do espaço-tempo devido a matéria e energia. A equação de Einstein estabelece, a partir do formalismo tensorial, a relação de como a massa e energia deformam a geometria do espaço-tempo, cuja solução no vácuo é conhecida como métrica de Schwarzschild. Essa métrica descreve o campo gravitacional exterior a um corpo massivo, esférico e sem carga elétrica, com dependência apenas da distância radial [4, 5].

Na região mais próxima a sua estrela, Mercúrio realiza um movimento que desafia a mecânica newtoniana ao apresentar um desvio angular pequeno em sua órbita. Tal teoria explica que, a maior parte desse precessão é devido aos efeitos gravitacionais de outros planetas do sistema solar, sendo os com mais influência, Vênus, Terra, Júpiter e, em menor valor o Sol, que apresenta uma forma oblata decorrente da rotação em torno de seu eixo. A teoria proposta por Einstein atribuiu uma pequena correção relativística ao considerar que após uma volta completa a órbita não é uma elipse fechada, o que é resultado da precessão

causada pela geometria do espaço-tempo[6, 7].

Neste trabalho, será abordado o problema da órbita de Mercúrio seguindo duas vertentes fundamentais da física: Mecânica Clássica e Teoria Relatividade Geral. Inicialmente, pelas leis de Newton e a lei da gravitação, que consideram a gravidade como uma força central que varia inversamente com o quadrado da distância entre os corpos. Utilizando o cálculo diferencial integral, será feito uma investigação acerca dos efeitos perturbativos gravitacionais sobre a órbita do planeta. Em seguida, com base nos princípios da Relatividade Geral, será empregada uma abordagem apoiada na métrica de Schwarzschild, que permite uma descrição mais precisa do movimento de Mercúrio no espaço-tempo curvo.

Capítulo 2

Mecânica Clássica

2.1 Fundamentos da Mecânica Clássica

A mecânica clássica representa o primeiro grande arcabouço teórico da física para a descrição do movimento dos corpos. O seu desenvolvimento compreende entre os séculos XVI e XVIII, ela surgiu como uma necessidade de dar respostas compreensíveis aos fenômenos naturais a partir de princípios racionais e métodos experimentais. O grande cientista sistematizador do conhecimento foi Galileu Galilei, cujos trabalhos na investigação dos movimentos adquiriu um caráter experimental e matemático. Essa nova abordagem na dinâmica viria a ser aprimorada por Isaac Newton no final do século XVII, a partir de leis gerais do movimento e do cálculo diferencial integral.

Em seu livro *Principia Mathematica*, Newton publicou em 1687 as leis que regem a dinâmica e a lei da gravitação universal, descrevendo com notável precisão movimentos de corpos celestes e terrestres. Essa estrutura teórica, baseada em conceitos como força, massa, espaço e tempo absoluto, persistiu por mais de dois séculos. Nesta seção, serão apresentados os princípios que fundamentam a mecânica clássica, com ênfase nas leis de Newton e forças em potências centrais que servirão de base para compreensão da relatividade geral e o entendimento da gravidade como a curvatura do espaço-tempo [8].

2.1.1 As Leis de Newton

As leis de Newton constituem a base formal da dinâmica clássica, fornecendo os princípios fundamentais que regem o movimento dos corpos sob a ação de forças. A primeira lei, também conhecida como princípio da inércia, estabelece que *um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme tende a manter seu estado, a menos que força resultante atue sobre ele*. A inércia é a resistência dos corpos em mudar seu estado de movimento, o que está intrinsecamente relacionada à massa do corpo.

A segunda lei estabelece quantitativamente que *a aceleração de um objeto é diretamente*

proporcional à força resultante que atua sobre ele e inversamente proporcional à sua massa, seguindo a mesma direção da força. Esta lei é definida pela equação vetorial:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

em termos diferenciais é expressa como sendo

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt},$$

onde \vec{P} é o momento linear.

A terceira lei afirma que, *para toda ação, existe uma reação de igual intensidade e direção, porém de sentido oposto.* Isso implica que, quando um corpo exerce força em outro, este aplica uma força no primeiro, no entanto, essas forças não se anulam por serem aplicadas em corpos distintos [9, 10, 11].

2.1.2 A Lei da Gravitação Universal

O astrônomo Cláudio Ptolomeu (100–170 d.C.) formulou o modelo geocêntrico, no qual a Terra encontra-se no centro de todos os movimentos celestes. Este modelo atendeu às perspectivas da época, o que fez durar por mais de mil anos. No século XVI, o astrônomo polonês Nicolau Copérnico (1473–1543) apresentou o modelo heliocêntrico baseado em observações e cálculos matemáticos de que o Sol está no centro do sistema solar e os planetas, incluindo a Terra, giram ao seu redor. Essa ideia representou uma ruptura com a tradição aristotélico-ptolomaica imposta até então [12].

Posteriormente, Johannes Kepler formulou as três leis do movimento planetário (que será visto em detalhes na próxima seção), descrevendo com precisão as órbitas elípticas dos planetas ao redor do Sol. Contudo, foi Isaac Newton quem consolidou o entendimento das forças que regem os corpos celestes ao formular, em 1687, a Lei da Gravitação Universal. Segundo Newton, *todos os objetos que possuem massa exercem forças de atração uns sobre os outros, cuja intensidade é diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles.* Essa lei é expressa pela equação:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (2.1)$$

onde \vec{F}_{12} é a força gravitacional que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2 de massas m_1 e m_2 ,

respectivamente, ver Figura (2.1). O sinal negativo indica que a força é atrativa, ou seja, tem sentido oposto ao vetor posição.

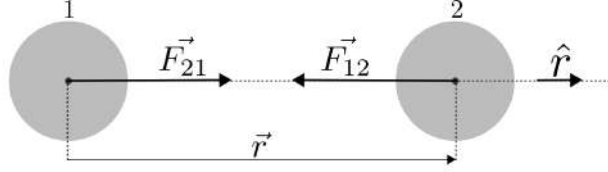


Figura 2.1: Representação da força gravitacional entre dois corpos de massas distintas

Fonte: Autoria própria (2025).

Esses corpos estão separados por uma distância r , módulo do vetor \vec{r} que possui vetor unitário \hat{r} . E G é a constante gravitacional universal, calculada em laboratório em 1798 pelo físico inglês Henry Cavendish (1731–1810), cujo valor experimental é aproximadamente $6,674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ [9, 13]. A dependência de \vec{F}_{12} com o inverso do quadrado da distância pode ser compreendido por meio do conceito de fluxo de campo gravitacional. Suponha uma esfera Z de raio r em torno da massa pontual M gerando um campo gravitacional ao seu redor. O vetor campo gravitacional \vec{g} gerado por essa massa é radial e aponta para a própria massa, dado pela seguinte relação

$$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r},$$

o elemento de área de Z em coordenadas esféricas é dado por

$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}.$$

O fluxo de campo gravitacional através de z é dado pela integral de superfície fechada do produto escalar $\vec{g} \cdot d\vec{A}$:

$$\Phi_g = \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-G \frac{M}{r^2} \hat{r} \right) \cdot (r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}).$$

Sendo o produto escalar $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$, chegaremos a expressão

$$\Phi_g = -GM \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.2)$$

Resolvendo separadamente as integrais na Eq.(2.2), encontramos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta &= -\cos \theta \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \\ \int_0^{2\pi} d\phi &= 2\pi,\end{aligned}$$

e, portanto, o fluxo torna-se

$$\Phi_g = -GM \cdot 2 \cdot 2\pi = -4\pi GM.$$

O resultado mostra que o fluxo não depende do raio da esfera, apenas de grandezas constantes. Para que o fluxo total permaneça invariante ao se aumentar a distância r , o módulo do campo e, portanto, da força gravitacional precisa decrescer proporcionalmente a $1/r^2$. Este formalismo matemático não apenas justifica a forma da Lei de Newton dada pela Eq.(2.1), mas também, estabelece uma profunda conexão entre a geometria do espaço e gravitação [14].

2.1.3 Conservação da Energia e do Momento Angular

Como vimos anteriormente, a lei da gravitação universal de Newton descreve uma força de atração que varia com o inverso do quadrado da distância entre dois corpos. Essa força é classificada como uma força central, pois atua sempre ao longo da linha que conecta os centros de massa dos corpos envolvidos. Matematicamente, uma força central pode ser expressa por

$$\vec{F} = F \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = F \frac{\vec{r}}{r}, \quad (2.3)$$

em que F representa a intensidade da força, que depende apenas da distância r . Essa força é conservativa (independente da trajetória). Considerando um sistema de corpos de massas M e m , existe uma energia potencial gravitacional associada, expressa pela equação

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r}.$$

A energia mecânica do sistema é a soma da energia cinética, T , e da energia potencial gravitacional

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}. \quad (2.4)$$

Como a força gravitacional não realiza trabalho dissipativo, a energia mecânica total E permanece constante ao longo do tempo. Além disso, outra grandeza que permanece constante é o momento angular \vec{L} , que em relação à origem do sistema de coordenadas é dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (2.5)$$

Derivando a Eq.(2.5) em relação ao tempo, chegaremos a expressão

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) \\ &= m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \\ &= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a}) \\ &= m(0 + \vec{r} \times \vec{a}) \\ &= \vec{r} \times m\vec{a}, \end{aligned}$$

como isso, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.6)$$

Substituindo a Eq.(2.3) na Eq.(2.6), teremos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times F\frac{\vec{r}}{r} = \frac{F}{r}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0, \quad (2.7)$$

onde esse resultado mostra que para forças centrais, $\vec{F} \propto \hat{r}$,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{constante}. \quad (2.8)$$

A conservação do momento angular implica que o vetor \vec{L} mantém sua direção e magnitude constantes durante o movimento. Assim, a conservação da energia e do momento angular não apenas simplifica a análise dos sistemas gravitacionais, como também fornece os alicerces teóricos para a compreensão da dinâmica orbital de corpos celestes [15, 16].

2.1.4 Equações do Movimento em Potenciais Centrais

Um potencial central é aquele cuja intensidade depende unicamente da distância entre duas partículas e está sempre direcionado ao longo da linha que as une. Em outras palavras, o potencial V é função apenas do módulo da posição relativa, isto é, $V = V(r)$, cuja a força central correspondente é obtida da forma

$$\vec{F}(r) = -\nabla V(r) = -\frac{dV}{dr}\hat{r}.$$

Considerando um sistema de duas partículas de massas m e M , em que M está fixa na origem e m se move sob a influência de um potencial central, a equação do movimento para m é dada pela segunda lei de Newton

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}. \quad (2.9)$$

Como mostrado anteriormente, o momento angular \vec{L} é conservado. Escolhendo o plano de movimento como sendo o plano xy , podemos descrever o vetor posição \vec{r} usando coordenadas polares (r, θ) , o que nos permite decompor a equação do movimento em componentes radiais e angulares. A velocidade em coordenadas polares é dada por

$$\vec{v} = r'\hat{r} + r\theta'\hat{\theta}, \quad (2.10)$$

derivando a Eq.(2.10) em relação ao tempo, obtemos a aceleração

$$\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\hat{r} + (r\theta'' + 2r'\theta')\hat{\theta},$$

como a força é central não há componente tangencial, portanto, a equação do movimento na direção $\hat{\theta}$ será

$$r\theta'' + 2r'\theta' = 0, \quad (2.11)$$

multiplicando ambos os lados da Eq.(2.11) por mr , chegaremos

$$\begin{aligned} mr^2\theta'' + 2mrr'\theta' &= 0 \\ \frac{d}{dt}(mr^2\theta') &= 0 \\ mr^2\theta' &= \text{constante} \quad \Rightarrow \quad mr^2\theta' = L, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde L representa o momento angular da partícula. Da Eq.(2.9), teremos apenas a equação radial da aceleração expressa da seguinte forma

$$m(r'' - r\theta'^2) = -\frac{dV}{dr}, \quad (2.13)$$

na Eq.(2.12), isolando θ' e substituindo na Eq.(2.13), obtemos a equação do movimento radial

$$mr'' = -\frac{dV}{dr} + \frac{L^2}{mr^3}. \quad (2.14)$$

A Eq.(2.14) pode ser entendida como o movimento de uma partícula em um potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$, com a inclusão de uma contribuição centrífuga ($L^2/2mr^2$), que representa a energia associada ao movimento angular, cuja a contribuição impede que a partícula colapse para $r = 0$, logo,

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (2.15)$$

Contudo, a equação do movimento se reduz à forma

$$mr'' = -\frac{dV_{\text{eff}}}{dr},$$

essa equação descreve o movimento radial da partícula como se estivesse sujeita a um potencial escalar $V_{\text{eff}}(r)$, o que permite a análise qualitativa do movimento orbital com base nas propriedades desse potencial.

A importância dessa formulação está em transformar um problema bidimensional com simetria central em um problema unidimensional de movimento efetivo radial, possibilitando a análise detalhada do tipo de órbita (fechada, aberta ou seção cônica) em função da energia e do momento angular [10, 16].

Capítulo 3

O Problema de Kepler

3.1 O Problema de Kepler

Em 1609, o astrônomo alemão Johannes Kepler publicou sua obra *Astronomia Nova*, onde apresentou as três leis do movimento planetário, que hoje levam seu nome. Os estudos das órbitas celestes tiveram grandes contribuições do astrônomo dinamarquês Tycho Brahe, que por sua vez coletou grandes quantidade de dados observacionais. A aquisição desses dados permitiram a Kepler formular as três leis do movimento planetário, que veremos a seguir [2, 15].

3.1.1 A Primeira Lei de Kepler: Órbitas Elípticas

Considere um planeta girando em torno do Sol, que está localizado em um foco, adotaremos o sistema de coordenadas no centro do Sol. O vetor que localiza o planeta é $\vec{r}=\vec{r}(t)$ e os vetores velocidade e aceleração são $\vec{v}=\vec{r}'$ e $\vec{a}=\vec{r}''$, respectivamente. De acordo com a lei da Gravitação e a segunda lei de Newton [2, 3]

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \quad r = |\vec{r}| \quad (3.1)$$

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3.2)$$

Igualando as Eqs.(3.1) e (3.2) acima, chegamos a seguinte expressão

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u},$$

com o vetor \vec{a} paralelo a \vec{r} , aplicando a derivada temporal no produto vetorial $\vec{r} \times \vec{v}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) &= \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{v}' \\ &= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o produto vetorial $\vec{r} \times \vec{v}$ é um vetor \vec{h} constante com módulo $|\vec{h}| \neq 0$. O vetor posição \vec{r} é perpendicular a \vec{h} para qualquer valor de t , ver Figura (3.1). Para demonstrar a primeira

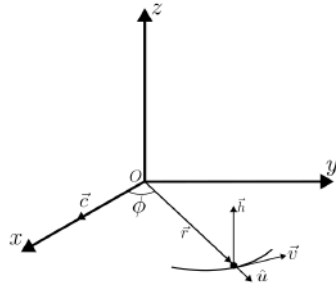


Figura 3.1: Representação vetorial no espaço tridimensional com destaque para o momento angular específico \vec{h}

Fonte: Autoria própria (2025).

lei de Kepler, vamos reescrever o vetor \vec{h} da seguinte forma

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{r} \times \vec{v} \\ &= \vec{r} \times \vec{r}' \\ &= r\hat{u} \times (r\hat{u})' \\ &= r\hat{u} \times (r'\hat{u} + r\hat{u}') \\ &= r\hat{u} \times r'\hat{u} + r\hat{u} \times r\hat{u}' \\ &= r^2(\hat{u} \times \hat{u}'), \end{aligned}$$

agora, considerando o produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{h} = -\frac{GM}{r^2}\hat{u} \times (r^2\hat{u} \times \hat{u}'),$$

temos

$$\vec{a} \times \vec{h} = -GM\hat{u} \times (\hat{u} \times \hat{u}'), \quad (3.3)$$

e utilizando a propriedade do produto vetorial triplo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

com \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} vetores quaisquer, mostramos que a Eq.(3.3) pode ser expressa na forma

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{h} &= -Gm[(\hat{u} \cdot \hat{u}')\hat{u} - (\hat{u} \cdot \hat{u})\hat{u}'] \\ \vec{a} \times \vec{h} &= GM\hat{u}'. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A Eq.(3.4) também pode ser obtido da seguinte forma

$$(\vec{v} \times \vec{h})' = \vec{v}' \times \vec{h} = \vec{a} \times \vec{h} = GM\hat{u}', \quad (3.5)$$

integrando a Eq.(3.5), chegaremos a expressão

$$\begin{aligned} \int (\vec{v} \times \vec{h})' dt &= GM \int \hat{u}' dt \\ \vec{v} \times \vec{h} &= GM\hat{u} + \vec{c}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O angulo ϕ está ente \vec{c} e \vec{r} , pois as coordenadas do planeta são (r, ϕ) . O vetor \vec{h} aponta na direção z , os vetores $\vec{v} \times \vec{h}$ e \hat{u} são perpendiculares a \vec{h} , portanto, o vetor constante \vec{c} também pertence ao plano xy [17]. A partir da Eq.(3.6), determinamos o seguinte produto escalar

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) &= \vec{r} \cdot (GM\hat{u} + \vec{c}) \\ &= GM\vec{r} \cdot \hat{u} + \vec{r} \cdot \vec{c} \\ &= GMr\hat{u} \cdot \hat{u} + |\vec{r}||\vec{c}| \cos \phi \\ &= GMr + rc \cos \phi \\ &= r(GM + c \cos \phi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

resolvendo para r na Eq.(3.7), chegaremos ao resultado

$$\begin{aligned} r &= \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{GM + c \cos \phi} \\ &= \frac{1}{GM} \frac{\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h})}{\left(1 + \frac{c}{GM} \cos \phi\right)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

o numerador na Eq.(3.8) é um produto misto, isto é

$$\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{h}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{h} = \vec{h} \cdot \vec{h} = h^2,$$

portanto, temos

$$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{c}{GM} \cos(\phi)}, \quad (3.9)$$

e considerando as seguintes definições

$$e = c/GM \quad \implies \quad 1/GM = e/c, \quad (3.10)$$

a Eq.(3.9) toma a seguinte forma

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\phi)}, \quad (3.11)$$

com

$$d = \frac{h^2}{c}.$$

A Eq.(3.11) é uma equação polar para uma seção cônica com foco na origem. Sabemos que a trajetória de um planeta é fechada, portanto, com excentricidade $e < 1$, o que determina uma cônica elíptica. Os pontos extremos da orbita do planeta são denominados de periélio e afélio, conforme a Figura (3.2).

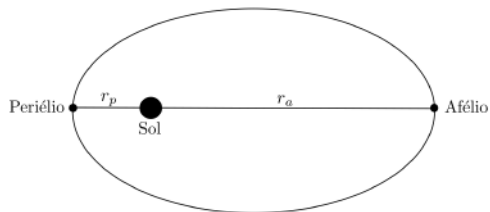


Figura 3.2: Representação de uma órbita elíptica em torno de um foco, conforme previsto pela primeira lei de Kepler. O corpo em movimento percorre a elipse sob influência de uma força central atrativa, com o foco ocupando a posição da fonte dessa força.

Fonte: Autoria própria (2025).

3.1.2 A Segunda Lei de Kepler: Áreas Iguais em Tempos Iguais

Experimentos mostram que a energia, momento linear e momento angular se conservam. Pela conservação do momento angular, temos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

não sofre variação no tempo, este em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\vec{L} = m\rho^2\varphi'\hat{z}.$$

Considerando a equação do comprimento de um arco, $l = \rho\varphi$, onde ρ é o raio da circunferência e φ o ângulo central, temos que para um deslocamento angular infinitesimal $d\varphi$ corresponde um elemento de arco

$$dl = \rho d\varphi.$$

O elemento de área dA varrido pelo vetor raio é então dado por

$$dA = \frac{1}{2}\rho dl = \frac{1}{2}\rho(\rho d\varphi) = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi,$$

a área total correspondente a um dado deslocamento é expressa pela integral

$$A = \int dA = \int \frac{\rho dl}{2} = \int \frac{\rho(\rho d\varphi)}{2} = \frac{1}{2} \int \rho^2 \varphi' dt = \frac{|\vec{L}|}{2m} \int dt,$$

portanto, para uma revolução, teremos

$$A = \frac{|\vec{L}|T}{2m},$$

comprovando que a lei das áreas mostra a relação direta entre a área descrita pelo movimento de um planeta e o momento angular [16].

3.1.3 A Terceira Lei de Kepler: Relação entre Período e Raio Médio

A força gravitacional sentida por um planeta que orbita o Sol é da forma centrípeta. Sendo assim, teremos, $\vec{F}_g = \vec{F}_{cp}$, cujos módulos são

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r},$$

isolando a velocidade nesta equação, chegamos a expressão

$$v^2 = \frac{GM}{r}, \quad (3.12)$$

para um volta completa em torno do Sol, teremos

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (3.13)$$

substituindo a Eq.(3.13) na Eq.(3.12), obtemos

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \Rightarrow 4\pi^2 r^3 = GMT^2,$$

a partir desse resultado, a terceira lei de Kepler assume a forma

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante},$$

com esta relação sendo aplicada a todos os corpos celestes que descrevem órbitas elípticas [3].

Capítulo 4

Movimento Planetário

4.1 Perturbações no Movimento Planetário

A mecânica newtoniana, com base na lei da Gravitação Universal, garante uma poderosa descrição do movimento dos corpos celestes. As órbitas planetárias em torno de uma estrela perfeitamente esférica são previstas pela teoria como elipses fixas, de acordo com as leis de Kepler. No entanto, o sistema solar real é dinâmico e caótico, com múltiplas interações gravitacionais. Essas perturbações produzem efeito sutis que no entanto, fazem com que as órbitas planetárias se desviem das elipses keplerianas perfeitas e estáticas [18].

4.1.1 O Vetor de Laplace-Runge-Lenz

As órbitas dos planetas são governadas por forças conservativas, ou seja, que não dependem da trajetória. Portanto, o momento angular, L , e a energia, E , são conservados. No contexto de forças centrais a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$\vec{P}' = f(r) \frac{\vec{r}}{r}.$$

O produto vetorial da derivada temporal do momento linear \vec{P}' com o momento angular \vec{L} , toma a forma

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= f(r) \frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{P}') \\ &= f(r) \left[\frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times m\vec{r}') \right] \\ &= mf(r) \left[\frac{\vec{r}}{r} \times (\vec{r} \times \vec{r}') \right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

implementando o produto vetorial triplo na Eq.(4.1)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

com

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{b} = \vec{r} \quad \text{e} \quad \vec{c} = \vec{r}',$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= mf(r) \left[\left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}' \right) \vec{r} - \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) \vec{r}' \right] \\ &= m \frac{f(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{r}']. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dada a seguinte relação

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(r \cdot r) = rr', \quad (4.3)$$

e substituindo a Eq.(4.3) na Eq.(4.2), obtemos

$$\begin{aligned} \vec{P}' \times \vec{L} &= m \frac{f(r)}{r} [(rr') \vec{r} - (r^2) \vec{r}'] \\ &= mf(r) [r' \vec{r} - r \vec{r}'] \\ &= -mf(r)r^2 \left(\frac{\vec{r}'}{r} - \frac{r' \vec{r}}{r^2} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{L}) = -mf(r)r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right). \quad (4.4)$$

Dentro do âmbito de forças centrais, a força proporcional ao inverso do quadrado da distância tem grande relevância física, a qual adotaremos em nossa análise. Na Eq.(4.4) substituindo $f(r) = -\frac{k}{r^2}$, chegamos a expressão

$$\frac{d}{dt}(\vec{P} \times \vec{L}) = -m \left(-\frac{k}{r^2} \right) r^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = mk \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (4.5)$$

integrando a Eq.(4.5), determina-se

$$\vec{P} \times \vec{L} = mk \frac{\vec{r}}{r} + \vec{A},$$

com $k = GMm$ e \vec{A} denominado de vetor de Laplace-Runge-Lenz, ver Figura (4.1).

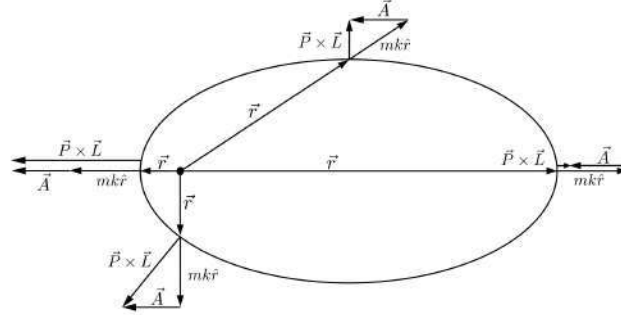


Figura 4.1: Representação do vetor de Laplace-Runge-Lenz no plano da órbita. Esse vetor aponta na direção do periélio e permanece constante em sistemas keplerianos ideais (sem perturbações), refletindo a simetria do potencial $1/r$ e a conservação da excentricidade.

Fonte: Autoria própria (2025).

Portanto, o vetor \vec{A} é uma constante de movimento no problema de Kepler não perturbado, isto é, para orbitas fixas e estáticas. No caso em que existe perturbação, a taxa de rotação desse vetor será a velocidade de precessão da órbita [19, 16, 20].

4.1.2 Contribuições Newtonianas para a Precessão do Periélio de Mercúrio

Um dos efeitos mais notáveis resultantes dessas perturbações é a precessão do periélio, que consiste no avanço gradual do ponto mais próximo de sua estrela. O planeta Mercúrio por ser mais próximo ao Sol, é fortemente influenciado pelo campo gravitacional do mesmo e pelas perturbações dos outros planetas, o que implica numa precessão significativa em sua órbita. Nesta seção iremos analisar o desvio do periélio de Mercúrio a partir da mecânica clássica de Newton.

A Equação de Binet

Para obtermos uma equação da trajetória $r = r(\theta)$, é conveniente fazer a mudança de variável

$$u = u(\theta) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{r}.$$

A partir da Eq.(2.12), referente a conservação do momento angular, podemos expressar θ' na forma

$$\theta' = \frac{L}{mr^2} = \frac{Lu^2}{m}. \quad (4.6)$$

A derivada temporal da posição r' , é dada pela regra da cadeia

$$r' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) \theta' = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \theta', \quad (4.7)$$

substituindo a Eq.(4.6) na Eq.(4.7), obtemos a expressão:

$$r' = \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \left(\frac{Lu^2}{m} \right) = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta}, \quad (4.8)$$

derivando a Eq.(4.8), temos

$$\begin{aligned} r'' = \frac{dr'}{dt} &= \frac{dr'}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad r'' = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) \left(\frac{Lu^2}{m} \right) \\ &= -\frac{Ld^2u}{md\theta^2} \frac{Lu^2}{m} \\ &= -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A componente radial da segunda lei de Newton é dada pela equação

$$F_r = m(r'' - r\theta'^2), \quad (4.10)$$

com isso, a força gravitacional em termos de u assume a forma

$$F_r(u) = -GMmu^2, \quad (4.11)$$

igualando as Eqs.(4.10) e (4.11), encontramos

$$m(r'' - r\theta'^2) = -GMmu^2, \quad (4.12)$$

substituindo na Eq.(4.12) as Eqs.(4.6) e (4.9), e considerando a mudança de variável ($r = 1/u$), obtemos

$$m \left[-\frac{L^2 u^2}{m^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} \left(\frac{Lu^2}{m} \right)^2 \right] = -GMmu^2, \quad (4.13)$$

após algumas simplificações, mostra-se que

$$-\frac{L^2 u^2}{m} \frac{d^2 u}{d\theta^2} - \frac{L^2 u^3}{m} = -GMmu^2, \quad (4.14)$$

agora, dividindo ambos os membros da Eq.(4.14) por $-L^2 u^2/m$ e assumindo $u \neq 0$, obtemos

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (4.15)$$

Esta é a equação de Binet para o potencial gravitacional newtoniano que descreve o movimento de uma partícula sob ação de uma força central, como a força gravitacional, no qual a trajetória é uma cônica.

Solução da Equação de Binet (Órbita Não Perturbada)

A solução geral da Eq.(4.15) é dada por

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} + A \cos(\theta - \theta_0),$$

onde A e θ_0 são constantes de integração [21]. Esta solução é comumente escrita na forma

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (4.16)$$

onde a excentricidade orbital é expressada pela relação

$$e = \frac{AL^2}{GMm^2},$$

com $0 \leq e < 1$ e θ_0 sendo uma constante de fase que determina a orientação da elipse no plano orbital. No periélio temos a seguinte condição sendo satisfeita

$$\cos(\theta - \theta_0) = 1 \quad \implies \quad \theta = \theta_0,$$

reescrevendo a Eq.(4.16) em termos de $r = 1/u$, mostra-se que

$$r(\theta) = \frac{L^2/(GMm^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (4.17)$$

onde p é um parâmetro geométrico da cônica associado à distância do foco a borda, sendo perpendicular ao eixo maior e dado pela expressão

$$p = \frac{L^2}{GMm^2}.$$

A Eq.(4.17) descreve uma trajetória perfeita e estática [20]. No sistema físico real, a órbita de Mercúrio não é uma elipse perfeitamente fechada e imóvel. O periélio de Mercúrio denota uma pequena precessão, uma mudança gradual na orientação da elipse ao longo do tempo. O fato é que o potencial gravitacional efetivo de Mercúrio é afetado por diversos fatores perturbativos que modificam a forma do potencial, produzindo a precessão. O principal fator que provoca tal mudança é a interação gravitacional de outros planetas. Sobre Mercúrio, além da intensa força do Sol, os demais corpos do sistema solar, em especial Vênus, Terra e Júpiter (devido a sua grande massa), influenciam gravitacionalmente em maior escala a órbita de Mercúrio.

Potencial Efetivo com Perturbações

O potencial efetivo gravitacional, Eq.(2.15), pode ser incrementado com um termo de perturbação $V_{\text{pert}}(r)$, com isso, temos a seguinte expressão

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + V_{\text{pert}}(r). \quad (4.18)$$

O termo $L^2/2mr^2$ é a energia potencial associada ao movimento angular e impede que o planeta descreva uma trajetória radial direto para a fonte gravitacional. O potencial

perturbado pode ser aproximado da seguinte forma

$$V_{\text{pert}}(r) = -\frac{\beta}{r^3}, \quad (4.19)$$

onde β é uma constante positiva que quantifica a intensidade da perturbação. Substituindo a Eq.(4.19) na Eq.(4.18), temos

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\beta}{r^3}, \quad (4.20)$$

cujo comportamento é ilustrado na Figura (4.2).

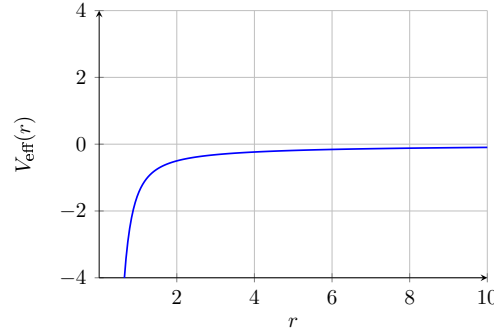


Figura 4.2: Potencial efetivo $V_{\text{eff}}(r)$ em função da distância radial r

Fonte: Autoria própria (2025).

É notório através do gráfico o quão rápido o $V_{\text{eff}}(r)$ cresce quando o r aumenta. A introdução de um potencial perturbativo modifica a força radial e como consequência, a equação de Binet. Ao considerarmos uma força perturbativa efetiva $F_{\text{pert}}(r)$ que, após as devidas manipulações e aproximações comuns em mecânica celeste (como a média sobre uma órbita ou a consideração de pequenas correções), leva a uma modificação linear na equação de Binet, que assume a forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}\right)u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (4.21)$$

Aqui, β_{eff} é uma constante efetiva que engloba os efeitos da perturbação. A derivação exata desta forma linear a partir de um $V_{\text{pert}}(r) = -\beta/r^3$ (que naturalmente levaria a um termo não linear $\propto u^2$) envolve etapas de linearização ou métodos de perturbação mais avançados. Tendo em vista o objetivo desta seção, podemos considerar a forma linear acima como uma

aproximação válida para perturbações fracas com $2m\beta_{\text{eff}}/L^2 \ll 1$.

Solução da Equação de Binet Modificada

A Eq.(4.21) é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes. Seja $k_0^2 = 1 - 2m\beta_{\text{eff}}/L^2$, obtemos a seguinte equação de Binet

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + k_0^2 u = \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (4.22)$$

A solução geral da Eq.(4.22) é da forma

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2 k_0^2} + A' \cos(k_0 \theta - \theta'_0),$$

onde $A' = eGMm^2/L^2 k_0^2$. Evidenciando o termo $GMm^2/L^2 k_0^2$, obtemos

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2 k_0^2} [1 + e \cos(k_0 \theta - \theta_0)], \quad (4.23)$$

substituindo na Eq.(4.23) o valor de k_0 , chegaremos a seguinte solução

$$u(\theta) = \frac{GMm^2}{L^2(1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2})} \left[1 + e \cos \left(\sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \theta - \theta_0 \right) \right],$$

onde e é a excentricidade e θ_0 é a constante de fase. Para pequenas perturbações, isto é,

$$\frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \ll 1, \quad (4.24)$$

temos que

$$\frac{1}{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \sim 1,$$

logo, a solução tem a forma

$$u(\theta) \approx \frac{GMm^2}{L^2} \left[1 + e \cos \left(\sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \theta - \theta_0 \right) \right]. \quad (4.25)$$

A Eq.(4.25), quando comparada com a Eq.(4.15), apresenta uma diferença em relação ao argumento do cosseno que passou a ser $k_0\theta - \theta_0$, isso se deve ao fato dos efeitos perturbativos na equação de Binet.

Cálculo do Avanço do Periélio de Mercúrio

Na Eq.(4.25), a frequência angular efetiva da oscilação radial é

$$k_0 = \sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}}.$$

Como a perturbação é pequena, Eq.(4.24), podemos expandir k_0 usando a aproximação binomial da forma

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2},$$

para x pequeno. Essa aproximação modifica k_0 da seguinte forma

$$k_0 = \sqrt{1 - \frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \right) = 1 - \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}.$$

O periélio ocorre quando o argumento do cosseno na Eq.(4.25) é um múltiplo de 2π , ou seja, $2n\pi$, onde n é um inteiro. Uma revolução completa, no sentido de $u(\theta)$ retornar ao mesmo valor com a mesma derivada (por exemplo, de um periélio ao próximo), ocorre quando $k\theta$ varia de 2π . Portanto, o ângulo θ_{rev} para uma órbita radial completa é

$$k\theta_{\text{rev}} = 2\pi \quad \implies \quad \theta_{\text{rev}} = \frac{2\pi}{k},$$

com $k = 1$ (sem perturbação), então $\theta_{\text{rev}} = 2\pi$, e a órbita é uma elipse fechada. No entanto, com $k \neq 1$, θ_{rev} será diferente de 2π . A precessão do periélio após uma revolução, $\Delta\theta$, é a diferença entre θ_{rev} e 2π :

$$\Delta\theta = \theta_{\text{rev}} - 2\pi = \frac{2\pi}{k} - 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{k} - 1 \right), \quad (4.26)$$

onde $1/k_0$ é

$$\frac{1}{k_0} \approx \frac{1}{1 - \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}}, \quad (4.27)$$

implementando a aproximação binomial na Eq.(4.27), temos

$$\frac{1}{(1-x)} \approx 1+x,$$

chega-se à expressão

$$\frac{1}{k} \approx 1 + \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}, \quad (4.28)$$

substituindo a Eq.(4.28) na Eq.(4.26), temos

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\approx 2\pi \left[\left(1 + \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2} \right) - 1 \right] \\ &\approx 2\pi \frac{m\beta_{\text{eff}}}{L^2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A Eq.(4.29) mostra que a perturbação introduzida na equação de Binet modificada induz uma precessão secular (isto é, um avanço lento e contínuo) no periélio da órbita. A direção da precessão (avanço ou retrocesso) depende do sinal de β_{eff} . Se $\beta_{\text{eff}} > 0$, como assumido para o $V_{\text{pert}} = -\beta/r^3$, então $k_0 < 1$, $1/k_0 > 1$, e $\Delta\theta > 0$, o que significa um avanço do periélio. A partir deste formalismo pode-se calcular a taxa de precessão do periélio de Mercúrio devido a várias perturbações newtonianas, uma vez que a constante β_{eff} apropriada para cada efeito seja determinada [10, 22, 19].

Capítulo 5

Teoria da Relatividade Geral

5.1 Fundamentos da Relatividade Geral e Aplicações ao Movimento Planetário

A Mecânica Clássica, embora bem-sucedida em descrever uma vasta gama de fenômenos gravitacionais, encontra limitações em regimes de campos gravitacionais muito intensos ou quando velocidades próximas à da luz estão envolvidas. Notavelmente, a precessão anômala do periélio de Mercúrio não pôde ser completamente explicada pela teoria newtoniana, mesmo considerando as perturbações de outros planetas. A Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Albert Einstein, oferece uma nova descrição da gravitação, não como uma força, mas como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de massa e energia. Esta seção introduzirá os princípios fundamentais da TRG e a solução de Schwarzschild, que é crucial para entender o movimento planetário em campos gravitacionais fortes e, subsequentemente, explicar a precessão do periélio de Mercúrio.

5.1.1 Postulados da Relatividade Geral

A TRG é fundamentada nos seguintes postulados fundamentais:

O Princípio da Equivalência: afirma que não há experimento local que possa distinguir entre os efeitos de um campo gravitacional uniforme e de um referencial com aceleração constante. Com isso, vale a equivalência entre massa inercial e gravitacional. Um efeito direto é que a luz deve ser desviada por campos gravitacionais.

O Princípio da Covariância Geral: as leis da física devem ser as mesmas em qualquer sistema de coordenadas, desse modo, as grandezas físicas por natureza são covariantes. Isso implica que, as componentes tensoriais covariantes se transformam de maneira específica sob mudanças de coordenadas, ver Apêndice (C.0.1).

A Curvatura do Espaço-Tempo: a presença de massa e energia curva o espaço-tempo. Inversamente, a curvatura do espaço-tempo dita como a matéria e a energia se movem. A

gravitação é, portanto, um efeito geométrico da curvatura do espaço-tempo.

Esses postulados propostos por Einstein dão sustentação teórica a TRG e a formulação matemática tensorial [23].

5.1.2 Curvatura do Espaço-Tempo e Órbitas Planetárias

Na TRG, as partículas livres movem-se ao longo de geodésicas no espaço-tempo curvo. Uma geodésica é o caminho de menor energia em um espaço curvo, análogo a uma linha reta no espaço Euclidiano. A equação que descreve uma geodésica de uma partícula em um campo gravitacional é da forma:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (5.1)$$

onde $x^\mu(\tau)$ são as coordenadas da partícula parametrizadas pelo tempo próprio τ (para partículas massivas). Os termos $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ são os símbolos de Christoffel (ou conexões da métrica), que são derivados das componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas parciais. As conexões da métrica estabelecem como vetores de base mudam ponto a ponto no espaço-tempo curvo. Esses símbolos são expressos na forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\rho}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} \right), \quad (5.2)$$

com $\mu, \alpha, \beta, \rho = 0, 1, 2, 3 = t, r, \theta, \phi$. As componentes não nulas da conexão da métrica constam no Apêndice (D.0.2). O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é fundamental, pois define a estrutura geométrica do espaço-tempo, logo, define como distância e intervalo de tempo são medidos. O quadrado do intervalo infinitesimal, ds , entre dois eventos no espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (5.3)$$

com a forma específica de $g_{\mu\nu}$ sendo determinada pela distribuição de massa e energia [7, 23].

5.1.3 Equações de Einstein para Campos Estáticos Esfericamente Simétricos

A relação entre a curvatura do espaço-tempo e a distribuição de massa e energia é dada pelas equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, juntamente com o escalar de Ricci R , são responsáveis pela informação acerca da curvatura do espaço-tempo. O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é o objeto principal a ser determinado, pois é através dele que obtemos informações sobre como as distâncias são medidas ao longo do espaço-tempo. E por fim, temos a constante gravitacional newtoniana, G , a velocidade da luz no vácuo, c e o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$, que nos diz como o conteúdo de energia, matéria e momento estão distribuídos. Basicamente, essa equação informa que a presença de massa e energia afeta a geometria do espaço-tempo, e a geometria afeta a maneira como a massa ou energia devem se comportar. Essa equação é de extrema importância para a física teórica, pois nos fornece uma descrição matemática precisa do comportamento da gravitação, permitindo que sejam feitas previsões sobre fenômenos astrofísicos, como órbitas planetárias, lentes gravitacionais, buracos negros entre outros [7].

A Eq.(5.4) é um sistema de dez equações diferenciais parciais não lineares acopladas para as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Encontrar soluções exatas para essas equações é geralmente muito difícil. Para campos estáticos e esfericamente simétricos no vácuo (ou seja, fora de uma distribuição de massa esférica e não rotativa), o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ é nulo. Nesse caso, as equações de campo de Einstein se simplificam para a forma $R_{\mu\nu} = 0$; a solução desta equação nas condições especificadas é conhecida como a métrica de Schwarzschild.

5.1.4 A Solução de Schwarzschild e suas Implicações

A geometria do espaço-tempo ao redor de corpos celestes massivos, como o Sol, pode ser descrita por uma solução exata das equações de campo de Einstein conhecida como solução de Schwarzschild. Essa métrica é fundamental na relatividade geral, pois representa a única solução esfericamente simétrica no vácuo, sendo essencial para o estudo de buracos negros, movimento de planetas e desvio gravitacional da luz.

O espaço Euclidiano tridimensional, com métrica dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.5)$$

apresenta as simetrias de uma esfera S^2 (2-esfera), representadas pelo grupo ortogonal especial $SO(3)$. Essas simetrias são caracterizadas pelos vetores de Killing A , B e C , escritos na forma

$$\begin{aligned} A &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z} \\ B &= x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x} \\ C &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Em geral, uma variedade esfericamente simétrica apresenta esses mesmos campos vetoriais. Isto acontece porque o espaço Euclidiano tridimensional e a variedade esfericamente simétrica compartilham o mesmo conjunto de vetores de Killing, pois a estrutura do conjunto de transformações de simetria é dada pelas relações de comutação

$$[A, B] = C \quad [C, A] = B \quad [B, C] = A.$$

Na demonstração analítica da solução de Schwarzschild, inicialmente, devemos considerar o espaço-tempo plano descrito pela métrica de Minkowski [?]. Esta métrica apresenta as mesmas simetrias da 2-esfera e possui a seguinte forma

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.6)$$

sendo a base para comparações com soluções mais complexas, como a métrica de Schwarzschild; permitindo analisar os efeitos da gravidade na estrutura do espaço-tempo. A Eq.(5.6) está expressa nas coordenadas cartesianas (t, x, y, z) . Para uma descrição mais adequada a sistemas com simetria esférica é conveniente reescrevê-la em coordenadas (t, r, θ, ϕ) , ver Apêndice (D.0.1)

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.7)$$

Uma vez que estamos interessados na solução para o exterior de um corpo esférico, devemos

considerar as equações de campo de Einstein no vácuo, ou seja, com $R_{\mu\nu} = 0$. A métrica procurada deve satisfazer duas condições importantes. Primeiramente, a solução deve ser estática, o que implica que não devem existir termos cruzados na métrica e que os componentes da métrica não podem depender da coordenada temporal. Em segundo lugar, a solução deve apresentar simetria esférica. Essa exigência é implementada considerando a métrica de Minkowski, cuja parte espacial é expressada da forma

$$r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.8)$$

Para que essa forma esférica seja preservada, o termo $d\phi^2$ deve vir acompanhado de um fator $\sin^2 \theta$ multiplicado pelo coeficiente do termo $d\theta^2$. Além disso, os demais coeficientes da métrica podem ser funções da coordenada radial r , já que se assume que o sistema é esfericamente simétrico e estático. Sendo assim, reescrevemos a Eq.(5.7) na forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2, \quad (5.9)$$

onde definimos, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Na Eq.(5.9), observa-se que a assinatura da métrica permanece inalterada mesmo com a introdução de funções exponenciais nos coeficientes. Contudo, para simplificar a forma da métrica, é conveniente eliminar a dependência exponencial. Para isso, realizamos uma mudança de coordenadas radiais, definindo uma nova coordenada \bar{r} , dada por

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r. \quad (5.10)$$

Essa mudança de coordenadas tem como objetivo absorver a função $\gamma(r)$ na coordenada radial \bar{r} , de modo que os termos angulares da métrica assumam a forma padrão $\bar{r}^2 d\Omega^2$, preservando explicitamente a simetria esférica. Derivando a Eq.(5.10) em relação a r , obtemos a expressão diferencial para $d\bar{r}$

$$d\bar{r} = e^{\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr} \right) dr, \quad (5.11)$$

elevando ambos os lados da Eq.(5.11) ao quadrado e isolando o termo dr^2 , podemos reescrever o elemento diferencial como

$$dr^2 = e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} d\bar{r}^2,$$

substituindo essa relação na métrica original, obtemos a métrica nas coordenadas $(t, \bar{r}, \theta, \phi)$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} e^{-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \\ &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos agora considerar o caso particular em que a função $\gamma(r) \rightarrow 0$, nesse limite, as coordenadas retornam às suas formas originais

$$\begin{aligned} \bar{r} &\rightarrow r \\ e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} &\rightarrow e^{2\beta(r)}, \end{aligned}$$

portanto, a Eq.(5.12) retorna à forma da métrica nas coordenadas padrão (t, r, θ, ϕ)

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5.13)$$

Essa forma evidencia a simetria esférica e estática da solução buscada para o campo gravitacional no vácuo, exterior a uma distribuição esférica de massa. As componentes covariantes da métrica dada pela Eq.(5.13) são expressas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{2\alpha(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\beta(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

enquanto isso, as componentes contravariantes são

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{tt} & g^{tr} & g^{t\theta} & g^{t\phi} \\ g^{rt} & g^{rr} & g^{r\theta} & g^{r\phi} \\ g^{\theta t} & g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta\phi} \\ g^{\phi t} & g^{\phi r} & g^{\phi\theta} & g^{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\beta(r)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

A geometria do espaço-tempo é totalmente caracterizada pelo tensor de Riemann. Este tensor tem a seguinte forma

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (5.16)$$

Usando as componentes não nulas da conexão, determinamos a componente deste tensor

$$\begin{aligned} R^t_{rtr} &= \partial_t \Gamma^t_{rr} - \partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{t\lambda} \Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^t_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{tr} \\ &= -\partial_r \Gamma^t_{tr} + \Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{rr} - \Gamma^t_{rt} \Gamma^t_{tr} \\ &= -\partial_r (\partial_r \alpha) + \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r \alpha \partial_r \alpha \\ &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2, \end{aligned}$$

com as demais componentes dadas por

$$\begin{aligned} R^t_{\theta t \theta} &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\ R^t_{\phi t \phi} &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\ R^r_{\theta r \theta} &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\ R^r_{\phi r \phi} &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\ R^\theta_{\phi \theta \phi} &= \sin^2 \theta (1 - e^{-2\beta}). \end{aligned}$$

Contraindo o tensor de Riemann, obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}, \quad (5.17)$$

com $\mu, \nu = t, r, \theta, \phi$. As componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + \partial_r \alpha \partial_r \beta - (\partial_r \alpha)^2 + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

A curvatura escalar de Ricci é obtida calculando o traço

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_\mu = R^t_t + R^r_r + R^\theta_\theta + R^\phi_\phi, \quad (5.18)$$

com

$$\begin{aligned} R^t_t &= -e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R^r_r &= e^{-2\beta} \left[-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right] \\ R^\theta_\theta &= \frac{1}{r^2} \left(e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \right) \\ R^\phi_\phi &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\sin^2 \theta \left(r e^{-2\beta} \partial_r \beta - r e^{-2\beta} \partial_r \alpha - e^{-2\beta} + 1 \right) \right], \end{aligned}$$

fazendo as devidas substituições, temos

$$\begin{aligned} R &= \left[-e^{-2\beta} \left(\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right) \right] \\ &+ \left[e^{-2\beta} \left(-\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \right) \right] \\ &+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r} + \frac{1}{r^2} \right] \\ &+ \left[\frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \beta - \frac{e^{-2\beta}}{r} \partial_r \alpha - \frac{e^{-2\beta}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right] \\ R &= -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta}) \right]. \end{aligned}$$

A relação entre as funções $\alpha(r)$ e $\beta(r)$ presentes nas exponenciais que estão multiplicando os coeficientes da métrica, Eq.(5.13), é obtida fazendo $R_{tt} = 0$ e $R_{rr} = 0$, isto é

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] = 0 \quad (5.19)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta = 0. \quad (5.20)$$

Das Eqs.(5.19) e (5.20), escrevemos o sistema

$$\begin{aligned}\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha &= R_{tt} e^{2(\alpha-\beta)} \\ -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta &= R_{rr},\end{aligned}$$

e a seguinte relação é obtida

$$\frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) = 0. \quad (5.21)$$

Integrando a Eq.(5.21), obtemos

$$\begin{aligned}\int \partial_r \alpha(r) dr &= - \int \partial_r \beta(r) dr \\ \alpha(r) &= -\beta(r) + c,\end{aligned} \quad (5.22)$$

onde c é uma constante de integração. Agora, fazendo $R_{\theta\theta} = 0$, temos

$$e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 = 0, \quad (5.23)$$

escrevendo a Eq.(5.23) na forma

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1, \quad (5.24)$$

e integrando ambos os membros, chegamos à seguinte expressão para $e^{2\alpha}$

$$\begin{aligned}\int \partial_r (r e^{2\alpha}) dr &= \int dr \\ r e^{2\alpha} + c_1 &= r + c_2 \\ r e^{2\alpha} &= r + c_2 - c_1 \\ e^{2\alpha} &= 1 - \frac{R_s}{r},\end{aligned}$$

onde $c_2 - c_1 \equiv R_s$. Substituindo $e^{2\alpha}$ na métrica, Eq.(5.13), obtemos

$$\begin{aligned}ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{-2\alpha(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -e^{2\alpha(r)} dt^2 + (e^{2\alpha(r)})^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ ds^2 &= -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \end{aligned}$$

no limite de campo fraco da teoria newtoniana $R_s \rightarrow 2GM$, portanto,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (5.25)$$

A métrica dada pela Eq.(5.25) é chamada de solução de Schwarzschild e descreve a geometria do espaço-tempo em torno de um objeto estático e esfericamente simétrico. A constante $R_s = 2GM$ é denominada de *raio de schwarzschild* [7, 24, 23, 22].

5.2 A Correção Relativística da Órbita de Mercúrio

O surgimento das leis de Newton representou um marco na ciência, permitindo importantes descobertas e previsões. A aplicação da lei da gravitação universal à astronomia foi fundamental para descrever as órbitas dos corpos celestes e possibilitou até mesmo a descoberta de novos planetas. No entanto, observações mais precisas da órbita de Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol, revelaram uma discrepância em relação ao que era previsto pelas equações de Newton. Especificamente, o eixo maior da órbita elíptica de Mercúrio apresenta um avanço de segundos de arco por século ($\Delta\phi \sim 43''$), um fenômeno conhecido como precessão do periélio. Esse desvio foi identificado pelo astrônomo francês Urbain Jean Joseph Le Verrier em 1859, que analisou detalhadamente as perturbações no movimento do planeta [6]. A precessão da órbita de Mercúrio, Figura (5.1), ocorre devido a vários fatores de perturbação, entre os quais se destacam a força gravitacional do Sol, dos planetas do sistema solar e os efeitos relativísticos previstos pela TRG. Para entender o fenômeno da precessão do periélio de Mercúrio, nas próximas seções serão estudados detalhadamente o problema de Kepler via TRG [20].

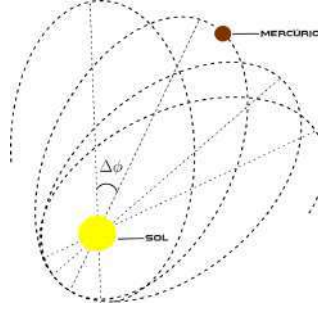


Figura 5.1: Representação da precessão do periélio de Mercúrio

Fonte: Autoria própria (2025).

5.2.1 Cálculo do Avanço do Periélio a Partir da Métrica de Schwarzschild

Ao longo de uma geodésica de interesse, a energia e o momento angular são conservados

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad \text{e} \quad L = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda},$$

sendo assim, podemos deduzir uma equação para a função posição em termos do parâmetro da geodésica, $r = r(\lambda)$. Considerando a métrica de Schwarzschild dada pela Eq.(5.25) e o quadrivetor

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (5.26)$$

com

$$V^\mu V_\mu = -\epsilon, \quad (5.27)$$

temos que

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = -\epsilon$$

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon, \quad (5.28)$$

multiplicando a Eq.(5.28) por $(1 - 2GM/r)$ e utilizando as expressões para o momento angular e energia, sendo que,

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \quad \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2},$$

obtemos a seguinte equação

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \epsilon - \frac{2GML^2}{r^3} - \frac{2GM\epsilon}{r} = 0, \quad (5.29)$$

multiplicando a Eq.(5.29) por $\frac{1}{2}$, temos

$$-\frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{GM\epsilon}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V_{eff}(r) = \epsilon, \quad (5.30)$$

onde $V_{eff}(r)$ é o potencial unidimensional

$$V_{eff}(r) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{GM\epsilon}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}, \quad (5.31)$$

cujo o gráfico é dado pela Figura (5.2)

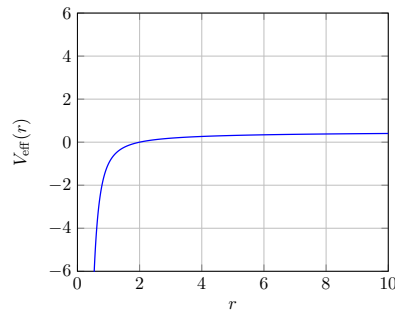


Figura 5.2: Potencial efetivo $V_{eff}(r)$ em função da distância radial r

Fonte: Autoria própria (2025).

A energia conservada por unidade de massa é E , mas a energia potencial efetiva para a coordenada r corresponde a

$$\varepsilon = \frac{1}{2}E^2.$$

A equação para $dr/d\phi$, onde temos

$$\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4}, \quad (5.32)$$

é obtida multiplicando as Eqs.(5.32) e (5.30), logo

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = 2\varepsilon - \epsilon + \frac{2GM\epsilon}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3}. \quad (5.33)$$

A partir da relação

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \\ \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{L^2}{r^4}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

substituindo a Eq.(5.34) na (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{r^4}{L^2} \left(2\varepsilon - \epsilon + \frac{2GM\epsilon}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2GML^2}{r^3}\right) \\ \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{r^4}{L^2} - \frac{2GMr^3}{L^2} + r^2 - 2GMr &= \frac{2\varepsilon r^4}{L^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Para resolver a Eq.(5.35) defini-se a variável

$$x = \frac{L^2}{GMr}, \quad (5.36)$$

que, por sua vez, permite obter a seguinte expressão

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{d}{dx} \left(\frac{L^2}{GMr} \right) \frac{dx}{d\phi} = -\frac{L^2}{GMx^2} \frac{dx}{d\phi}. \quad (5.37)$$

Substituindo as Eqs.(5.36) e (5.37) em (5.35), determina-se

$$\frac{L^2}{G^2 M^2 x^2} \left(\frac{dx}{d\phi} \right) + \frac{L^6}{G^4 M^4 x^4} - \frac{2L^4}{G^2 M^2 x^3} + \frac{L^4}{G^2 M^2 x^2} - \frac{2L^2}{x^2} = \frac{2\epsilon L^6}{G^4 M^4 x^4},$$

multiplicando esta equação por $\frac{G^2 M^2 x^4}{L^4}$, chegamos a expressão

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 x}{d\phi^2} - 2 + 2x - \frac{6G^2 M^2 x^2}{L^2} &= 0 \\ \frac{d^2 x}{d\phi^2} - 1 + x &= \frac{3G^2 M^2 x^2}{L^2}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

A Eq.(5.38) no contexto da dinâmica newtoniana teria a forma

$$\frac{d^2 x}{d\phi^2} - 1 + x = 0, \quad (5.39)$$

no entanto, a TRG atribui o termo não linear

$$\frac{3G^2 M^2 x^2}{L^2} \quad (5.40)$$

ao considerar a deformação geométrica do espaço-tempo. A solução da Eq.(5.38) é dada por

$$x = x_0 + x_1. \quad (5.41)$$

A equação associada ao termo de ordem zero é dada na forma

$$\frac{d^2 x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0, \quad (5.42)$$

com solução expressa por

$$x_0 = 1 + e \cos \phi, \quad (5.43)$$

enquanto que para o termo de primeira ordem, temos

$$\frac{d^2 x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3G^2 M^2 x_0^2}{L^2}. \quad (5.44)$$

Substituindo a Eq.(5.43) na Eq.(5.44), obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 x_1}{d\phi^2} + x_1 &= \frac{3G^2 M^2}{L^2} (1 + e \cos \phi)^2 \\
 &= \frac{3G^2 M^2}{L^2} (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \\
 &= \frac{3G^2 M^2}{L^2} \left[1 + 2e \cos \phi + e^2 \left(\frac{1 + \cos 2\phi}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{3G^2 M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + 2e \cos \phi + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\phi \right]. \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

Para resolver está equação temos que considerar as relações trigonométricas

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\phi^2} (\phi \sin \phi) + \phi \sin \phi &= 2 \cos \phi \\
 \frac{d^2}{d\phi^2} (\cos 2\phi) + \cos 2\phi &= -3 \cos 2\phi,
 \end{aligned}$$

portanto, a solução x_1 tem a forma

$$x_1 = \frac{2G^2 M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + e\phi \sin \phi - \frac{1}{6} e^2 \cos 2\phi \right]. \tag{5.46}$$

O termo mais notável é $e\phi \sin \phi$, que se acumula ao longo de órbitas sucessivas, como é observado no gráfico da Figura (5.3)

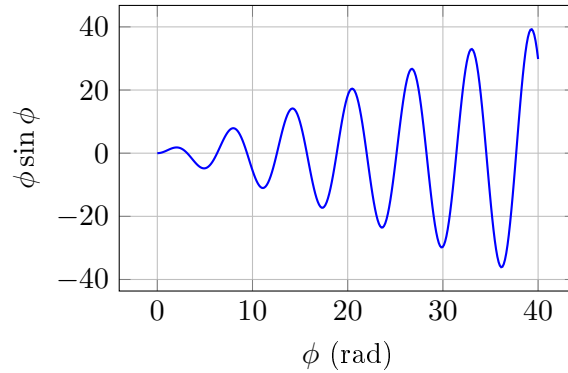


Figura 5.3: Contribuição da solução x_1 para a perturbação na órbita de Mercúrio

Fonte: Autoria própria (2025).

Este comportamento da solução leva a seguinte conclusão para a solução geral

$$x = 1 + e \cos \phi + \frac{3G^2 M^2 e}{L^2} \phi \sin \phi.$$

Esta expressão por ser reescrita na forma

$$x = 1 + e \cos[(1 - \alpha)\phi], \quad (5.47)$$

sendo

$$\alpha = \frac{3G^2 M^2}{L^2}.$$

Implementando a série de Taylor da função trigonométrica $\cos(1 - \alpha)$ com $\alpha = 0$, temos

$$\begin{aligned} \cos[(1 - \alpha)\phi] &= \cos \phi + \alpha \frac{d}{d\alpha} \cos[(1 - \alpha)\phi] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \cos \phi + \alpha \phi \sin \phi, \end{aligned}$$

agora, para uma volta completa, ou seja, a cada $\phi = 2\pi$, tem-se um avanço no ângulo do periélio

$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2},$$

considerando a equação de uma elipse

$$r = \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos \phi},$$

e o momento angular sendo escrito na forma

$$L^2 \approx GM(1 - e^2)a,$$

temos que o avanço do periélio poder ser determinado da seguinte forma

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a}.$$

Este resultado possibilita a determinação com certa precisão da taxa de precessão do periélio

de Mercúrio[7, 22, 23].

5.2.2 Comparação com Dados Observacionais

A órbita de Mercúrio apresentou um dos primeiros desafios observacionais à mecânica newtoniana. Durante o século XIX, astrônomos notaram que o avanço do periélio do planeta excedia as previsões teóricas em aproximadamente 43 segundos de arco por século (arcsec/século). Essa discrepância persistiu mesmo após considerar todas as perturbações gravitacionais conhecidas.

A solução veio com o advento da TRG de Einstein, que prediz naturalmente um avanço adicional do periélio devido à curvatura do espaço-tempo. A Tabela (5.1) apresenta a comparação quantitativa entre os dados observacionais e as previsões relativísticas.

Tabela 5.1: Comparação entre observações e previsões da TRG para o avanço do periélio de Mercúrio.

Parâmetro	Valor (arcsec/século)
Avanço geodésico observado	575.31
Contribuição Newtoniana	532.30
Resíduo observado	43.01
Predição da TRG	42.98

Fonte: Autoria própria (2025).

Como mostra a tabela, a diferença entre o resíduo observado (43.01 arcsec/século) e a previsão da TRG (42.98 arcsec/século) é de apenas 0.03 arcsec/século, uma concordância relevante entre os valores observacional e teórico. Esta precisão, alcançada sem parâmetros ajustáveis, tornou-se um dos pilares experimentais da TRG. Medições modernas com técnicas de radar refinaram ainda mais esses valores, confirmando continuamente a teoria com incertezas inferiores a 0,01 arcsec/século. A resolução do enigma do periélio de Mercúrio ilustra o poder preditivo da TRG e marcou um ponto de virada na física teórica, demonstrando a necessidade de uma nova compreensão da gravitação [20, 7, 23, 22].

5.2.3 Relevância Histórica da Precessão do Periélio na Confirmação da Relatividade Geral

A resolução do enigma da precessão anômala do periélio de Mercúrio pela TRG transcendeu a mera solução de um problema astronômico; ela marcou um ponto de inflexão na

física, evidenciando as limitações das leis de Newton e a necessidade de um novo paradigma para a gravitação. Enquanto a física newtoniana descreve a gravidade como uma força que age instantaneamente entre massas num espaço euclidiano e tempo absoluto, a TRG introduziu conceitos revolucionários. A gravidade emerge da geometria dinâmica do espaço-tempo, descrita matematicamente através de tensores, como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o tensor de curvatura de Riemann, que se relacionam com a distribuição de matéria e energia através das equações de campo de Einstein, Eq.(5.4). A predição correta do avanço do periélio surgiu como uma consequência direta desta formulação, onde o movimento dos corpos celestes é uma geodésica nesse espaço-tempo curvo. A importância deste feito reside também na forma como a TRG aborda as grandezas covariantes, assegurando que as leis físicas sejam expressas de maneira independente do sistema de coordenadas escolhido (princípio da covariância geral). Esta característica é fundamental e contrasta com a estrutura da mecânica clássica. A correção para a órbita de Mercúrio não é uma simples correção de Lorentz no sentido das transformações da relatividade especial, que se aplicam a espaços-tempos planos; em vez disso, é uma manifestação intrínseca da curvatura do espaço-tempo perto do Sol, indo muito além das aproximações de campo fraco ou baixas velocidades onde as correções relativísticas especiais poderiam ser consideradas. O sucesso em explicar Mercúrio, onde outras teorias falharam, demonstrou o poder da estrutura tensorial e dos princípios geométricos da TRG, impulsionando sua aceitação e destacando a profundidade da nova compreensão do universo proposta por Einstein [23, 25].

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, buscou-se tornar compreensível para alunos da graduação o fenômeno da precessão da órbita de Mercúrio, expondo conceitos e equações de forma clara e didática. De início, revisaram-se as leis de Newton, a lei da gravitação universal e os princípios de conservação da energia e do momento angular. Em seguida, outro ponto enfatizado, foi a abordagem feita sobre força central e potencial efetivo. Logo após, estudaram-se as leis de Kepler com base no cálculo diferencial integral, ao considerar órbitas estáticas e fixas. Posteriormente, na mecânica newtoniana, introduziram-se fatores perturbativos ao potencial efetivo, o que resultou na equação de Binet modificada, cuja solução inclui contribuições gravitacionais que influenciam a precessão de Mercúrio. Para explicar corretamente a discrepância entre os valores teóricos e observacionais, empregaram-se as equações de campo de Einstein, as quais estabelecem a relação entre curvatura do espaço-tempo devido à matéria e à energia. Por fim, a métrica de Schwarzschild, que descreve a geometria em torno de um corpo esfericamente simétrico, sem rotação e carga elétrica foi empregada para o cálculo da correção relativística. Com isso, resolveu-se a discrepância entre os valores observados e os teóricos, confirmando-se a validade da TRG.

Apêndice A

Lei de Transformação de Coordenadas no Espaço Bidimensional

Considere os sistemas de coordenadas (x, y) e (x', y') ilustrados na Figura (A.1). As

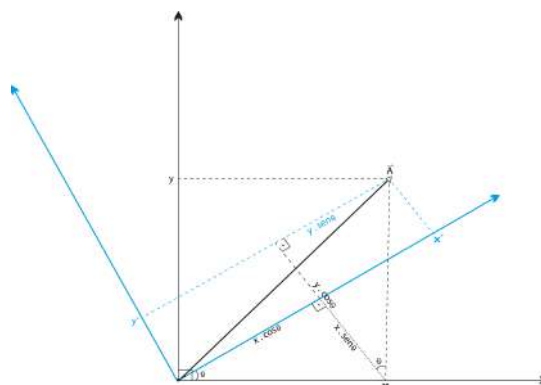


Figura A.1: Representação de um plano rotacionado em torno de um eixo fixo

Fonte: Autoria própria (2025).

coordenadas (x', y') do ponto A se relacionam com as coordenadas (x, y) pela expressão

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta. \quad (\text{A.2})$$

Reescrevendo as Eqs.(A.1) e (A.2) com $x = x_1$ e $y = x_2$, teremos

$$x'_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \quad (\text{A.3})$$

$$x'_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE A. LEI DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS NO ESPAÇO BIDIMENSIONAL

Os co-senos diretores podem ser definidos na forma

$$a_{11} = \cos \theta \quad a_{12} = \sin \theta \quad a_{21} = -\sin \theta \quad a_{22} = \cos \theta,$$

substituindo os co-senos diretos nas Eqs.(A.3) e (A.4), obtemos:

$$x'_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} \tag{A.5}$$

$$x'_2 = -x_1 a_{21} + x_2 a_{22}. \tag{A.6}$$

A vantagem dessas notações é que a mesma nos permite reescrever as Eqs.(A.5) e (A.6) com o emprego do somatório

$$x'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2$$

Apêndice B

Lei de Transformação Vetorial

Vetores são entidades matemáticas que possuem direção, sentido e obedece a equação de transformação de componentes

$$V'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.1})$$

As componentes do vetor \mathbf{A} no sistema de coordenadas rotacionado (x', y') são

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ A'_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta, \end{aligned}$$

pela definição de a_{ij} como o co-seno do angulo entre a direção x'_i positiva e a direção x_j positiva, podemos escrever (coordenadas cartesianas)

$$a_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j},$$

portanto, a lei de transformação vetorial assume a forma

$$V'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} V_j, \quad (\text{B.2})$$

com $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Apêndice C

Análise Tensorial

Tensores são importantes em muitas áreas da física, incluindo relatividade geral e eletrodinâmica. Escalar e vetores são casos especiais de tensores. Uma quantidade que não muda sobre rotação do sistema de coordenadas em um espaço tridimensional, uma invariante, é denominada escalar. Um *escalar* é especificado por um número real e é um tensor de ordem 0. Nesse sentido, uma quantidade cujas componentes mudam sob rotações como as da distância de um ponto a partir da origem escolhida, é denominada vetor. A transformação das componentes do vetor sob uma rotação das coordenadas preserva o vetor como uma entidade geométrica, independentemente da estrutura de referência. Em um espaço tridimensional, um *vetor* é especificado por $3 = 3^1$ números reais, por exemplo suas componentes cartesianas, e é um tensor de ordem 1. Um tensor de ordem n tem 3^n componentes que se transformam de uma maneira definida. Essa filosofia de transformação é de crucial importância para a análise tensorial e obedece ao conceito de vetor e de espaço vetorial (ou linear) dos matemáticos e à noção dos físicos de que observáveis físicos não dependem da escolha de estruturas coordenadas. Há uma base física para tal filosofia: descrevemos o mundo físico pela matemática, mas quaisquer previsões físicas que fazemos devem ser independentes de nossas convenções matemáticas [26].

C.0.1 Componente Covariante de um Tensor

Vetores ou tensores com o índice subscrito (A_i) são denominados de covariantes. Este tipo de componente é diretamente proporcional ao vetor de base

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2, \quad (\text{C.1})$$

com

$$A_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 \quad A_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2. \quad (\text{C.2})$$

A lei de transformação das componentes covariantes de um vetor é dada na forma

$$A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j.$$

O índice i é fixo enquanto j representa uma soma. Para $i, j = 1, 2, 3$, teremos

$$\begin{aligned} A'_1 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} A_j = \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} A_3 \\ A'_2 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_2} A_j = \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} A_3 \\ A'_3 &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_3} A_j = \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} A_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} A_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} A_3. \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} A'_x &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_1} A_j = \frac{\partial \rho}{\partial x} A_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial x} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial x} A_z \\ A'_y &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_2} A_j = \frac{\partial \rho}{\partial y} A_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial y} A_z \\ A'_z &= \frac{\partial x_j}{\partial x'_3} A_j = \frac{\partial \rho}{\partial z} A_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial z} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial z} A_z. \end{aligned}$$

C.0.2 Componente Contravariante de um Tensor

Vetores ou tensores com o índice sobrescrito (A^i) são denominados de contravariantes. Este tipo de componente é inversamente proporcional ao vetor de base. A lei de transformação das componentes contravariantes de um vetor é dada na forma

$$A^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} A^j.$$

O índice i é fixo enquanto j representa uma soma. Para $i, j = 1, 2, 3$, teremos

$$\begin{aligned} A^{1'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x_3} A_3 \\ A^{2'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x_3} A_3 \\ A^{3'} &= \frac{\partial x^{3'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial x^{3'}}{\partial x_1} A_1 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x_3} A_3. \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} A^{x'} &= \frac{\partial x^{1'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial x}{\partial \rho} A_\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial x}{\partial z} A_z \\ A^{y'} &= \frac{\partial x^{2'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial y}{\partial \rho} A_\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial y}{\partial z} A_z \\ A^{z'} &= \frac{\partial x^{3'}}{\partial x_j} A_j = \frac{\partial z}{\partial \rho} A_\rho + \frac{\partial z}{\partial \theta} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial z} A_z. \end{aligned}$$

Apêndice D

Métrica de Schwarzschild

D.0.1 Mudanças de Coordenadas

A relação entre os sistemas de coordenadas cartesiano e esférico é expressa na forma

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

Diferenciando as equações acima obtemos as expressões

$$\begin{aligned}dx &= \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi \\dy &= \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi \\dz &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,\end{aligned}$$

substituindo dx , dy e dz na Eq.(5.6), temos

$$\begin{aligned}ds^2 &= -dt^2 + (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi)^2 \\&\quad + (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta - r \sin \theta \cos \phi d\phi)^2 \\&\quad + (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2,\end{aligned}$$

e após alguma manipulações matemáticas, mostramos que o quadrado da distância infinitesimal é

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

D.0.2 Conexões da Métrica

A conexão da métrica Γ_{tr}^t é obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial r} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial r} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} \right) \left[\frac{\partial (-e^{2\alpha(r)})}{\partial r} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e^{2\alpha(r)}} \right) (-e^{2\alpha(r)} 2\partial_r \alpha) \\
 &= \partial_r \alpha,
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

as demais componentes são

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta(r)} \\
 \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta(r)} \sin^2 \theta & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\
 \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

D.0.3 Tensor de Riemann

Segue abaixo as componentes do tensor de Riemann para o espaço-tempo de Schwarzschild

$$\begin{aligned}
 R_{\theta t \theta}^t &= \partial_t \Gamma_{\theta\theta}^t - \partial_\theta \Gamma_{t\theta}^t + \Gamma_{t\lambda}^t \Gamma_{\theta\theta}^\lambda - \Gamma_{\theta\lambda}^t \Gamma_{t\theta}^\lambda \\
 &= \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\theta\theta}^r \\
 &= \partial_r \alpha \cdot (-r e^{-2\beta}) \\
 &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\phi t \phi}^t &= \partial_t \Gamma_{\phi\phi}^t - \partial_\phi \Gamma_{t\phi}^t + \Gamma_{t\lambda}^t \Gamma_{\phi\phi}^\lambda - \Gamma_{\phi\lambda}^t \Gamma_{t\phi}^\lambda \\
 &= \Gamma_{tr}^t \Gamma_{\phi\phi}^r \\
 &= \partial_r \alpha \cdot (-r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) \\
 &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\theta r \theta}^r &= \partial_r \Gamma_{\theta \theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r \theta}^r + \Gamma_{r \lambda}^r \Gamma_{\theta \theta}^\lambda - \Gamma_{\theta \lambda}^r \Gamma_{r \theta}^\lambda \\
 &= \partial_r \Gamma_{\theta \theta}^r + \Gamma_{r r}^r \Gamma_{\theta \theta}^r - \Gamma^r \Gamma_{\theta \theta}^r \Gamma_{r \theta}^\theta \\
 &= \partial_r (-r e^{-2\beta}) + (\partial_r \beta)(-r e^{-2\beta}) - (-r e^{-2\beta}) \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &= -e^{-2\beta} + 2r^{-2\beta} \partial_r \beta - r e^{-2\beta} \partial_r \beta + e^{-2\beta} \\
 &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\phi r \phi}^r &= \partial_r \Gamma_{\phi \phi}^r - \partial_\phi \Gamma_{r \phi}^r + \Gamma_{r \lambda}^r \Gamma_{\phi \phi}^\lambda - \Gamma_{\phi \lambda}^r \Gamma_{r \phi}^\lambda \\
 &= \partial_r \Gamma_{\phi \phi}^r + \Gamma_{r r}^r \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \phi}^r \Gamma_{r \phi}^\phi \\
 &= \partial_r (r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) + \partial_r \beta (-r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) \cdot \frac{1}{r} \\
 &= -e^{-2\beta} \sin^2 \theta + 2r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta - r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta + e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
 &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\phi \theta \phi}^\theta &= \partial_\theta \Gamma_{\phi \phi}^\theta - \partial_\phi \Gamma_{\theta \phi}^\theta + \Gamma_{\theta \lambda}^\theta \Gamma_{\phi \phi}^\lambda - \Gamma_{\phi \lambda}^\theta \Gamma_{\theta \phi}^\lambda \\
 &= \partial_\theta \Gamma_{\phi \phi}^\theta + \Gamma_{\theta r}^\theta \Gamma_{\phi \phi}^r - \Gamma_{\phi \phi}^\theta \Gamma_{\theta \phi}^\phi \\
 &= \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{r} \cdot (r e^{-2\beta} \sin^2 \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
 &= -[\cos \theta \cos \theta + \sin \theta (-\sin \theta)] - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
 &= -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
 &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
 &= \sin^2 \theta - e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\
 &= \sin^2 \theta (1 - e^{-2\beta}).
 \end{aligned}$$

Apêndice E

Seções Cônicas

Representação esquemática da projeção radial e da distância à diretriz de uma órbita, Figura(E.1). A projeção radial indica a distância instantânea do corpo ao centro de força, enquanto a diretriz é uma linha de referência utilizada para definir a excentricidade e a forma da trajetória. O ponto P em coordenadas polares (r, θ) é dado por

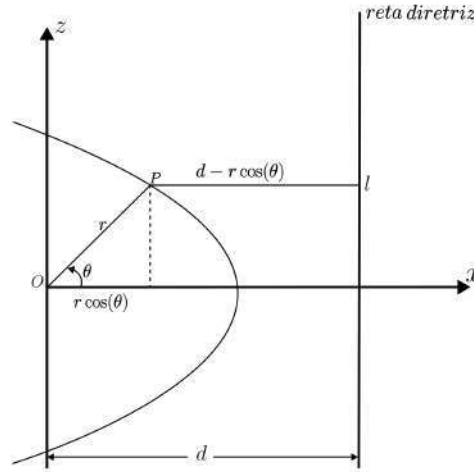


Figura E.1: Representação esquemática da projeção radial e distância à diretriz de uma órbita

Fonte: Autoria própria (2025).

$$|OP| = r \quad \text{e} \quad |Pl| = d - r \cos \theta.$$

Aplicando a definição de excentricidade

$$\frac{|OP|}{|PL|} = e \quad \Rightarrow \quad |OP| = e|PL|$$

$$r = e(d - r \cos \theta) \quad (E.1)$$

tomando o quadrado desta equação e convertendo para coordenadas cartesianas, temos que

$$\begin{aligned} r^2 &= e^2(d - r \cos \theta)^2 \\ x^2 + y^2 &= e^2(d - x)^2 \\ x^2 + y^2 &= e^2(d^2 - 2dx + x^2) \\ x^2 + y^2 &= e^2d^2 - 2dxe^2 + x^2e^2, \end{aligned}$$

isolando e^2d^2 ,

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2dxe^2 = e^2d^2,$$

dividindo esta equação por $(1 - e^2)$, chegamos ao resultado

$$x^2 + \frac{2dxe^2}{1 - e^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}. \quad (\text{E.2})$$

No primeiro membro da Eq.(E.2) podemos "acrescentar um zero" de modo que

$$x^2 + \frac{2dxe^2}{1 - e^2} + \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 - \left(\frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2},$$

o que permitirá completar o quadrado

$$\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2} + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2}, \quad (\text{E.3})$$

o segundo membro pode ser reescrito como segue

$$\frac{e^2d^2}{1 - e^2} + \frac{d^2e^4}{(1 - e^2)^2} = \frac{(1 - e^2)e^2d^2 + d^2e^4}{(1 - e^2)^2} = \frac{d^2e^2}{(1 - e^2)^2},$$

portanto, a Eq. (E.3) torna-se

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}. \quad (\text{E.4})$$

Na Eq.(E.4), temos que $e < 1$ representa uma elipse da forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1,$$

com os seguintes parâmetros,

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2} \\ b^2 &= \frac{e^2 d^2}{1-e^2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 = \frac{e^4 d^2}{(1-e^2)^2} \\ c &= -h = \frac{e^2 d}{1-e^2}. \end{aligned}$$

Isolando r na Eq. (E.1), encontramos

$$\begin{aligned} r &= ed - re \cos \theta \\ r(1 + e \cos \theta) &= ed \\ r &= \frac{ed}{1 + e \cos \theta}, \end{aligned} \tag{E.5}$$

a Eq. (E.5) descreve uma cônica com foco na origem sendo aplicada no estudo da órbita de um corpo sob força central.

Referências Bibliográficas

- [1] M. R. MARTINS, A. D. BUFFON, and M. C. D. NEVES, “A astronomia na antiguidade: um olhar sobre as contribuições chinesas, mesopotâmicas e egípcias,” *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, vol. 12, no. 2, pp. 115–132, 2019.
- [2] M. A. GARMS and I. L. CALDAS, “Síntese das leis de kepler,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, no. 4, p. e4201, 2017.
- [3] J. C. CARVALHO FILHO and A. S. M. GERMANO, “Leis de kepler e a gravitação universal,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 35, no. 2, p. 2501, 2013.
- [4] A. SAA, “Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de schwarzschild,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, no. 4, p. e4801, 2016.
- [5] D. SOARES, “De schwarzschild a newton,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, p. e20200123, 2020.
- [6] R. F. F. CUNHA and A. C. TORT, “O estudo de precessão da órbita de mercúrio no ensino médio,” *Revista do Professor de Física*, vol. 1, no. 2, pp. 45–56, 2017.
- [7] S. M. CARROLL, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1 ed., 2019.
- [8] C. A. ANTUNES, V. B. GALHARDI, and C. A. HERNASKI, “As leis de newton e a estrutura espaço-temporal da mecânica clássica,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, p. e3311, 2018.
- [9] I. NEWTON, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica [Princípios Matemáticos da Filosofia Natural]*. Londini [Londres]: Royal Society, 1. ed. original ed., 1687.
- [10] S. T. THORNTON and J. B. MARION, *Dinâmica clássica de partículas e sistemas*. São Paulo: Cengage Learning, 2011. Tradução de: Classical dynamics of particles and systems, 5th ed.
- [11] D. HALLIDAY, R. RESNICK, and J. WALKER, *Fundamentos de física*, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 10 ed., 2016.

- [12] C. M. PORTO, “A revolução copernicana: aspectos históricos e epistemológicos,” *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, p. e20190190, 2020.
- [13] P. A. TIPLER and G. MOSCA, *Física para cientistas e engenheiros*, vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 6 ed., 2009.
- [14] F. F. S. JUSTINO and J. J. RODRIGUES, “Uma análise do comportamento do campo gravitacional no interior da terra,” *Latin-American Journal of Physics Education*, vol. 14, no. 4, p. 4310, 2020.
- [15] H. M. NUSSENZVEIG, *Curso de física básica*, vol. 1. São Paulo: Edgard Blücher, 4 ed., 2002.
- [16] C. FARINA, “O vetor de laplace-runge-lenz no problema de kepler,” *Fís. UEFS*, vol. 5, pp. 1–2, 2006.
- [17] J. STEWART, *Cálculo*, vol. 2. São Paulo: Cengage Learning, 7 ed., 2013. Tradução de: Calculus, 7th ed.
- [18] O. D. MIRANDA, “Avanço do periélio de mercúrio – o primeiro sucesso da teoria da relatividade geral de einstein,” *Conexões – Ciência e Tecnologia*, vol. 13, no. 2, pp. 7–20, 2019.
- [19] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. San Francisco: Addison-Wesley, 3rd ed., 2002.
- [20] R. F. F. d. CUNHA, *A gravitação e a precessão de Mercúrio: um texto para professores do Ensino Médio*. Tese (doutorado), Rio de Janeiro, 2017.
- [21] P. R. CONCEIÇÃO, *Estudo do problema de Kepler via simetrias de Lie*. Tese (doutorado), São Paulo, 2018.
- [22] S. WEINBERG, *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972.
- [23] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992. First edition. James Vickers is credited as co-author in later printings.
- [24] J. PLEBANSKI and A. KRASINSKI, *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [25] D. McMahon, *Relativity demystified*. Tata McGraw-Hill Education, 2006.
- [26] G. B. ARFKEN and H. J. WEBER, *Física matemática: métodos matemáticos para engenharia e física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 6 ed., 2007. Tradução de: Mathematical methods for physicists, 6th ed.